Kondo問題とBethe仮説

東大教養物理　十河清，和達三樹

§0. はじめに

近年1次元のFermion系でBethe仮説によって厳密に解けるモデルがいくつか見つかってきている[1)]。この一連の発展のなかで、Andrei-LowensteinとWiegmannという人達が1次元Kondo問題（sdモデル）を解いた[2)]。これらFermion系に対するBethe仮説では、運動量空間における対角化に加えて、スピン空間における対角化も必要で、この問題を詳細に論じたYangに因んで、この解法をBethe-Yang仮説と呼ぶこともある[3)]。このスピン演算子の対角化が、実はBaxterによる8-バーテックス・モデルの転送行列の対角化[4)]と密接な関係にある。これらBethe仮説で解かれるモデルについて、完全積分可能系の持つ「普遍性」のあらわれとして、量子逆散乱法、因子化されたS行列、交換する転送行列を持つ格子モデル等の問題を統一的に論じる観点が獲得されつつある[5)]。本稿ではこうした観点の具体例として、不純物スピンの大きさを1/2から一般のSにした場合のKondo問題にBethe仮説がいかに適用されるかを示し、あわせて関連する問題、即ちS行列の因子化と等価バーテックス・モデルとについて論じる[6)]。

§1. 1次元Kondo問題（sdモデル）とBethe仮説

我々が議論する任意不純物スピンのsdモデルは、次のハミルトニアンによって記述される：

$$H=\int dx\left\{\psi_\alpha^+\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_\alpha+J\,\delta(x)\,\psi_\alpha^+\,\vec{\sigma}_{\alpha\alpha'}\psi_{\alpha'}\,\vec{S}_{mm'}\right\}. \tag{1.1}$$

ここで特徴的なのは、(i) 1次元であること、(ii) kinetic termがlinearであること、(iii) $\vec{S}$の大きさが1/2でなくともよいことだが、それぞれ(i)不純物スピンとの相互作用がδ関数的なのでS-波のみが散乱される、(ii) Fermi面近傍で線形化する、(iii)文献2)はS=1/2の場合であるがSを一般にしても以下にみる如く解くことができる、という理由から承認される。ハミルトニアン(1.1)に対する固有値問題をFock空間で考えると、N体のSchrödinger方程式は次のようになる：

$$-i\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\Psi_{\alpha_1\cdots\alpha_N,m}(x_1,\cdots,x_N)+J\sum_{j=1}^{N}\delta(x_j)\,\vec{\sigma}_{\alpha_j\alpha_j'}\cdot\vec{S}_{mm'}\,\Psi_{\alpha_1\cdots\alpha_j'\cdots\alpha_N,m'}(x_1,\cdots,x_N)=E\,\Psi_{\alpha_1\cdots\alpha_N m}(x_1,\cdots,x_N) \tag{1.2}$$

そこで問題は方程式(1.2)を解けということである。

1) 1体問題（N=1）　　方程式(1.2)は

$$-i\frac{\partial}{\partial x}\Psi_{\alpha m}(x)+J\,\delta(x)\,\vec{\sigma}_{\alpha\alpha'}\cdot\vec{S}_{mm'}\,\Psi_{\alpha'm'}(x)=E\,\Psi_{\alpha m}(x) \tag{1.3}$$

となり、その解は

$$\Psi_{\alpha m}(x)=e^{ikx}\left\{A_{\alpha m}(x<0)\,\theta(-x)+A_{\alpha m}(x>0)\,\theta(x)\right\}, \tag{1.4}$$

$$A_{\alpha m}(x>0)=R_{\alpha\alpha'}^{mm'}\,A_{\alpha'm'}(x<0) \tag{1.5}$$

で与えられ、エネルギー固有値は $E=k$ となる。ここに行列 R は

$$R^{mm'}_{\alpha\alpha'} = \left(\frac{1-\frac{iJ}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{S}}{1+\frac{iJ}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{S}} \right)^{mm'}_{\alpha\alpha'} \tag{1.6}$$

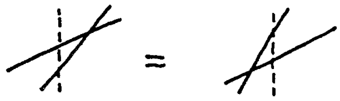
である[7]。この散乱過程を以下のような diagram で図示すると見やすくなる：

$R =$  (1.7)

ここで点線は原点に静止している不純物スピンを表わし、実線は波数 k を持ち走っている電子を表わしている。

2) 2体問題 $(N=2)$　2電子系に対しても Bethe 仮説がコンシステントに適用できるためには、関係式

$$R_{10}R_{20}P_{12} = P_{12}R_{20}R_{10} \tag{1.8}$$

 (1.9)

が成立しなければならない。ここに行列 P_{12} は

$$P_{12} = \frac{1}{2}(1+\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2) \tag{1.10}$$

で、電子1,2のスピンを交換する演算子である。式(1.6)と(1.10)とを代入して関係式(1.8)の成立を直接に確かめることができる。

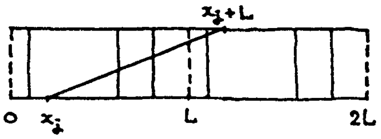
3) N体問題　式(1.8)をくりかえし適用することによって一般のN体系に対しても Bethe 仮説が work することがわかる。解は、$E=\sum_{j=1}^{N} k_j$ で

$$\Psi_{\alpha_1\cdots\alpha_N m}(x_1,\cdots,x_N) = \sum_{P} A_{\alpha_1\cdots\alpha_N m}(Q;P)\exp\{i\sum_{j=1}^{N}k_{Pj}x_{Qj}\} \tag{1.11}$$

$$\text{for}\quad X_Q:\ x_{Q0}<x_{Q1}<\cdots<x_{QN} \tag{1.12}$$

ここに P,Q は $0,1,\cdots,N$ の permutation で $k_0=0,\ x_0=0$ とする。

波動関数(1.11)に周期境界条件 $\Psi(x_j+L)=\Psi(x_j)$ を課すると



$$e^{ik_jL}A_{\alpha_1\cdots\alpha_N m} = P_{jj-1}\cdots P_{j1}R_{j0}P_{jN}\cdots P_{jj+1}A_{\alpha_1'\cdots\alpha_N' m'} \tag{1.13}$$

の如きスピン空間における固有値方程式を得る。方程式(1.13)は、量子逆散乱法によって対角化できる。詳細は別稿にゆずって、関連した話題に移る。

§2. 因子化されたS行列

先にみた如く、Kondo 問題に Bethe 仮説が適用されるためには、関係式(1.8)の成立が重要であった。実は以下で論じるように式(1.8)はS行列の因子化方程式に他ならないのである。(1.8)を spectral parameter u を含むように拡張する：

$$R_{10}(u)R_{20}(u+u')r_{12}(u') = r_{12}(u')R_{20}(u+u')R_{10}(u) \tag{2.1}$$

ここに演算子 R, r は

$$R(u)=\alpha(u)+\beta(u)\vec{\sigma}\cdot\vec{S}\ ,\quad r_{12}(u)=a(u)+b(u)\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2 \tag{2.2}$$

で与えられる。そこで問題は、因子化方程式(2.1)を解くこと、即ち(2.1)を恒等的に満足させるように、α,β,a,b の関数形を決めよという問題である。

式(2.1)は、次のようなC-数の方程式に帰着される：

$$\beta(u)\beta(u+u')(a(u')-b(u')) = 2\big(\beta(u)\alpha(u+u')-\alpha(u)\beta(u+u')\big)\,b(u') . \qquad (2.3)$$

この関数方程式(2.3)は以下の如く解ける：

$$f(u)\equiv \alpha(u)/\beta(u) = a(u)/2b(u) = \frac{1}{2}+g\cdot u \qquad (2.4)$$

ここにgは任意定数で、系のcoupling constantと関係する。

次にRにunitarity条件：$R(u)R(-u)=1$ を課すると、$\beta(u)$に対する関数方程式

$$\beta(u)\beta(-u) = 1\big/\left[S(S+1)+(\tfrac{1}{2}+gu)(\tfrac{1}{2}-gu)\right] \qquad (2.5)$$

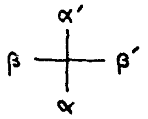
を得る。解析性の条件のもとで(2.5)を解くと、いろいろな場合があるが、そのうち簡単なものは、次のようである：

$$\text{case 1)}\quad \beta(u)=\frac{\lambda}{\xi+\mu\cdot u}\quad (2.6),\qquad \text{case 2)}\quad \beta(u)=\lambda\,\frac{\Gamma(\xi-\mu\cdot u)}{\Gamma(1+\xi+\mu\cdot u)}\quad (2.7),$$

ここに、$\xi^2/\lambda^2 = S(S+1)+1/4$, $\mu^2/\lambda^2 = g^2$ である。

§3. 等価なバーテックス・モデル

因子化されたS行列があると、それに関連して解ける2次元格子モデルが存在する[8]。今2次元正方格子で、次のような基本バーテックス：



$$\alpha,\alpha' = S, S-1,\cdots,-S;\quad \beta,\beta'=1,-1 \qquad (3.1),\qquad R^{\alpha\alpha'}_{\beta\beta'}(u)=\alpha(u)\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'}+\beta(u)\vec{S}_{\alpha\alpha'}\cdot\vec{\sigma}_{\beta\beta'} \qquad (3.2)$$

を持つ、バーテックス・モデルを考える。もしα, βを(2.4)を満たすように選んでおけば因子化方程式(2.1)に対応する、Yang-Baxter関係：

$$R(u-v)\big(L_n(u)\otimes L_n(v)\big) = \big(L_n(v)\otimes L_n(u)\big)\,R(u-v) \qquad (3.3)$$

が成立し、そのため転送行列が互いに可換となる：$[T(u),T(v)]=0$ 。ここに

$$L_n(u)=\begin{pmatrix}\alpha(u)+\beta(u)S_n^z & \beta(u)S_n^- \\ \beta(u)S_n^+ & \alpha(u)-\beta(u)S_n^z\end{pmatrix}\quad (3.4),\qquad T(u)=\mathrm{tr}\,(L_N(u)\cdots L_1(u)) \qquad (3.5)$$

$$R(u-v)=\begin{pmatrix}1&&&0\\&\tilde{b}&\tilde{c}&\\&\tilde{c}&\tilde{b}&\\0&&&1\end{pmatrix},\quad \tilde{b}(u-v)=\frac{1}{1+g(u-v)},\quad \tilde{c}(u-v)=\frac{g(u-v)}{1+g(u-v)} \qquad (3.6)$$

このような、可換な転送行列は、量子逆散乱法によって対角化できる。

(文献) 1) Bergknoff-Thacker, PR D 19 (1979) 3666, Andrei-Lowenstein, PRL 43 (1979) 1698

2) Andrei-Lowenstein, PRL 45 379 (1980), 46 356 (1981), Wiegmann, J. Phys. C 14 (1981) 1463

3) Yang, PRL 19 (1967) 1312

4) Baxter, Ann. Phys. 70 (1972) 193

5) Sogo-Uchinami-Nakamura-Wadati, Prog. Theor. Phys. 66 (1981) 1284, 和達, 学会誌 36 (1981) 786

6) Sogo-Wadati, preprint

7) Wiegmann は (1.3) の解を (1.6) ではなく, $R=e^{-iJ\vec{\sigma}\cdot\vec{S}}$ としている。

また、Lai, Yong-Shi, J. Phys. C 14 (1981) L915 もみよ。

8) Zamolodchikov, Comm. Math. Phys. 69 (1979) 165